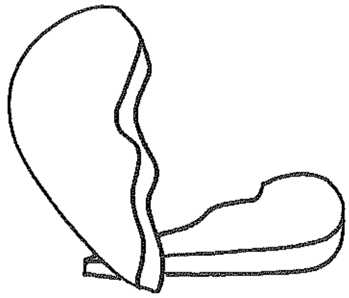
Breuken

Weet je de truc met verdubbelen en halveren nog? Je kunt 25 x 24 gemakkelijk uitrekenen op de volgende manier:
25 x 24 = 50 x 12 = 100 x 6 = 600.



Gebroken hart

Opgave 1

Even wat opgaven om er in te komen:

a) 18 x 5
b) 40 x 12

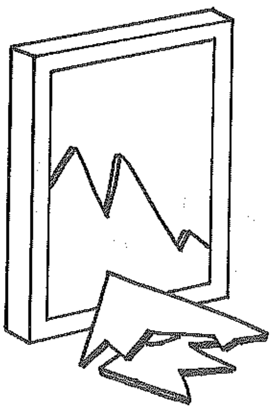
Vooral als er een breuk in de opgave staat kun je overwegen deze methode toe te passen. Een gebroken getal kan door een vermenigvuldiging juist heel worden. $3\frac{1}{2}$ x 8 = 7 x 4 = 28.

Opgave 2

Bereken nu ook:

a) $2\frac{1}{2}$ x 16
b) $5\frac{1}{2}$ x 38
c) $3\frac{1}{3}$ x 27

Opgave b kon je oplossen door een combinatie van verschillende trucs. Had je dat ook?
Het kon op de volgende manier:
$5\frac{1}{2}$ x 38 = 11 x 19 = 209 (1 x 2 met daarachter 1 x 9; truc 3).
Bij opgave c kun je het handigst het eerste getal keer drie doen en het tweede getal door drie delen. Je krijgt dan 10 x 9. Een breuk kun je dus "te lijf" gaan door te vermenigvuldigen. Maar hoe moet dit als je het tweede getal niet kunt delen door het getal waarmee je het eerste getal vermenigvuldigd hebt? Dit wordt uitgelegd in het volgende voorbeeld.

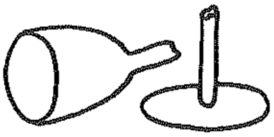


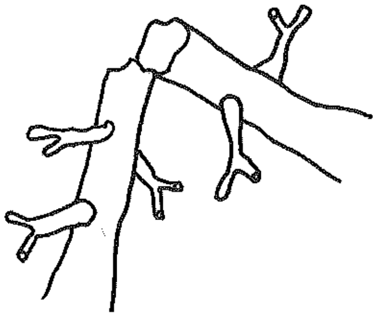
Scherven brengen geluk

$2\frac{1}{2}$ x $3\frac{1}{3}$. Het eerste getal wil je het liefst met 2 vermenigvuldigen en het tweede getal met 3. Dan zit er in beide getallen geen breuk meer. Maar je hebt dan wel 6 keer te veel gekregen. Je kunt dit verwerken in het antwoord. Het kan dus als volgt:

$6\frac{1}{2}$ x 3 = (13 x 3) / 2 = 39/2
$2\frac{1}{2}$ x $3\frac{1}{3}$ = (5 x 10) / 6 = 50/6 = 25/3
$6\frac{1}{2}$ x $3\frac{1}{2}$ = (13 x 7) / 4 = (100 − 9) / 4 = 91/4

Bij de antwoorden van de voorbeelden kunnen we nog de helen eruit halen maar we kunnen het getal ook gewoon zo laten staan. Wij doen dit laatste.





Opgave 3

Bereken:

a) $3\frac{1}{2} \times 7$
b) $4\frac{1}{3} \times 9$
c) $3\frac{1}{4} \times 17$
d) $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2}$
e) $12\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

Het delen van breuken gaat vergelijkbaar. Bij een breuk mag je de teller en de noemer door hetzelfde getal delen. Zo is $15 / 24 = 5 / 8$.
Je mag natuurlijk de teller en noemer ook vermenigvuldigen met hetzelfde getal. En een deling kun je schrijven als een breuk. $2 : 3$ is hetzelfde als $\frac{2}{3}$.

Voorbeeld: $2\frac{1}{2} : 3 = \frac{2\frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6}$ en $4\frac{1}{3} : 7 = \frac{4\frac{1}{3}}{7} = \frac{13}{21}$.

Opgave 4

Bereken:
a) $3\frac{1}{2} : 5$

b) $5 : 2\frac{1}{5}$

c) $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2}$

d) $7\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$

e) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

Je kunt de berekeningen ook met letters uitvoeren. Zo is

$\frac{a}{b} \times 4 = \frac{4a}{b}$ en $\frac{a}{b} : 5 = \frac{\frac{a}{b}}{5} = \frac{a}{5b}$

Opgave 5

Bereken:
a) $\frac{3}{a} \times b$

b) $\frac{a}{b} : c$

c) $5 : \frac{a}{b}$

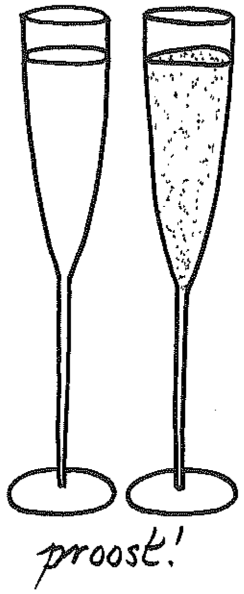
d) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

Als je de laatste deling goed hebt dan heb je een bewijs gegeven van de "bekende truc" delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde.

We gaan nu een bekend probleem te lijf.

Onderzoek: wijnglazen

Je hebt twee wijnglazen. Het linker glas bevat witte wijn en het rechter glas rode wijn. In beide glazen zit evenveel wijn. Vul een vingerhoedje met witte wijn uit het linker glas en giet dat in het glas met rode glas. Roer de wijn in het rechter glas. Vul dan een vingerhoedje met wijn uit het rechter glas. Giet deze wijn (rode wijn met een beetje witte wijn erdoor) in het glas met witte wijn. In welk glas is het deel van de bijgegoten wijn, wit in rood en rood in wit, het grootst?



a Stel dat in de beide glazen in het begin 10 cc wijn zit en dat er 1 cc van het linker glas naar het rechter glas gaat.
Hoeveel cc wit en rood zit er dan in het linker glas en in het rechter glas?

b Hierna gaat er 1 cc van het mengsel van het rechter glas naar het linker glas. Hoeveel wit en rood zit er nu in beide glazen?

c Bereken de verhouding rood / wit in het linker glas en de verhouding wit / rood in het rechter glas. Zijn de verhoudingen gelijk?

Een probleem kan begrijpelijk gemaakt worden door eerst met een voorbeeld te werken. Het is dan wel belangrijk met een getallenvoorbeeld te komen waar gemakkelijk mee te rekenen is. In dit voorbeeld moet er met breuken gerekend worden.

d Verzin zelf een beginsituatie, dus een hoeveelheid cc wijn, die in het begin in de glazen aanwezig is en een handige hoeveelheid die van het ene naar het andere glas wordt verplaatst zodat er geen breuken in de berekening staan.

Met een voorbeeld heb je niet bewezen dat de uitkomst in alle gevallen dezelfde is. Het kan nu zo zijn en met andere hoeveelheden weer anders.

e Je gaat nu in het algemeen berekenen hoe de verhouding wordt na het heen en weer verhuizen van de wijn. Dit doe je als volgt.
Neem aan dat er in het begin p cc in beide glazen zit en dat er q cc wordt verplaatst.
Hoeveel wit en rood zit er na de eerste verandering in het linker glas en in het rechter glas?

f Hierna gaat er q cc van het mengsel van het rechter glas naar het linker glas. Hoeveel wit en rood zit er nu in beide glazen?

g Bereken de verhouding rood / wit in het linker glas en de verhouding wit / rood in het rechter glas. Wat is meer?

De verhouding is in beide glazen hetzelfde.

Dit vraagstuk is bekend van een management training. Het idee is dat je, als je met een probleem zit, het soms beter is er ook eens op een ander manier naar te kijken. Dit probleem is hier een goed voorbeeld van.
Bekijk het eens zo. Voor het begin zit er in beide glazen evenveel wijn. Erna ook. Stel dat je na afloop de witte en rode wijn scheidt. Haal de rode wijn uit het linker glas. Dan is er een ruimte over. In die ruimte past precies de witte wijn uit het andere glas. Het linker glas bevat dus evenveel rode wijn als het rechter glas witte wijn.
Het maakt zelfs niet uit of we het glas na de eerste keer overgieten goed geroerd hebben! Elke verhouding van rode en witte wijn die teruggegoten wordt zorgt ervoor dat de verhouding oorspronkelijke wijn en andere wijn hetzelfde is. Als er maar evenveel wijn teruggaat als er heengegaan is. De samenstelling maakt niet uit.